

## Proposta para o ensino de Geometria: sólidos no Geogebra

### Proposal for teaching Geometry: solids in Geogebra

### Propuesta para la enseñanza de la Geometría: sólidos en Geogebra

*Paulo Vitor da Silva Santiago<sup>1</sup>  
José Rogério Santana<sup>2</sup>*



<https://doi.org/10.28998/2175-6600.2024v16n38pe15862>

**Resumo:** A Geometria tem ganhado espaço na Educação Básica, principalmente com o suporte da Tecnologia Digital no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta didática para o ensino de áreas e volumes com uso do GeoGebra, associado a moldes de papel enquanto material concreto. Embasamos esta proposta nos quadros teóricos da Sequência Fedathi e da Engenharia Didática. A metodologia adotada é de natureza qualitativa, orientada pelas duas primeiras fases da Engenharia Didática. Os resultados parciais trazem uma construção geométrica a ser utilizada pelo professor de Matemática para exploração de conceitos fundamentais da Geometria Espacial, com a possibilidade de replicação destes materiais e seu uso de forma dinâmica em sala de aula.

**Palavras-chave:** Geometria Espacial. Engenharia Didática. Ensino de Matemática. GeoGebra. Sequência Fedathi.

**Abstract:** Geometry has gained space in Basic Education, mainly with the support of Digital Technology in the Mathematics teaching and learning process. The objective of this work is to present a didactic proposal for teaching areas and volumes using GeoGebra, associated with paper templates as a concrete material. We base this proposal on the theoretical frameworks of the Fedathi Sequence and Didactic Engineering. The methodology adopted is qualitative in nature, guided by the first two phases of Didactic Engineering. The partial results provide a geometric construction to be used by Mathematics teachers to explore fundamental concepts of Spatial Geometry, with the possibility of replicating these materials and using them dynamically in the classroom.

**Keywords:** Spatial Geometry. Didactic Engineering. Teaching Mathematics. GeoGebra. Fedathi Sequence.

<sup>1</sup> Universidade Federal do Ceará (UFC). Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9028281383409966>. Orcid: <http://orcid.org/0000-0002-6608-5452>. Contato: [paulovitor.paulocds@gmail.com](mailto:paulovitor.paulocds@gmail.com).

<sup>2</sup> Universidade Federal do Ceará (UFC). Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6859739260962963>. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8327-5864>. Contato: [rogesantana@ufc.br](mailto:rogesantana@ufc.br).



**Resumen:** La Geometría ha ganado espacio en la Educación Básica, principalmente con el apoyo de la Tecnología Digital en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta didáctica de áreas y volúmenes didácticos utilizando GeoGebra, asociado a plantillas de papel como material concreto. Basamos esta propuesta en los marcos teóricos de la Secuencia Fedathi y la Ingeniería Didáctica. La metodología adoptada es de carácter cualitativo, guiada por las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica. Los resultados parciales brindan una construcción geométrica para ser utilizada por profesores de Matemáticas para explorar conceptos fundamentales de la Geometría Espacial, con la posibilidad de replicar estos materiales y utilizarlos dinámicamente en el aula.

**Palabras Clave:** Geometría espacial. Ingeniería Didáctica. Enseñanza de Matemáticas. GeoGebra. Secuencia Fedathi.

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria é uma das áreas temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) presente na disciplina de Matemática, com caráter que favorece o desenvolvimento de atividades com uso da Tecnologia Digital (TD), o que pode tornar o Ensino de Matemática atrativo e viabilizar a apropriação do conhecimento pelos estudantes. De acordo com Santiago (2021, p. 25) “[...] a Geometria é um assunto sempre presente na educação e pouco trabalhado em seus problemas difíceis de uma forma simples, sem a utilização de cálculos extensos, mas que pouco é citado em livros didáticos escolares”.

Nesse cenário, e compreendendo que algumas demonstrações geométricas apresentadas em livros didáticos serem insuficientes para a compreensão dos conteúdos, alguns docentes incorporam a quinta competência geral do Ensino Fundamental da BNCC em seu plano de aula, em que se deve “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267). A utilização de recursos tecnológicos é uma alternativa para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem de maneira ética, reflexiva e crítica, visando produzir conhecimentos básicos e resolver problemas com autonomia (BRASIL, 2018). Borba, Silva e Gadanidis (2018) afirmam que o professor precisa criar um ambiente agradável e interativo para seus alunos, incluindo recursos tecnológicos em sua prática pedagógica para apresentar conteúdos voltados para o desenvolvimento cognitivo da aprendizagem.

É importante incluir atividades que utilizam as TDs no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, aprimorando a metodologia de ensino em face de novas circunstâncias, analisando as diversas mudanças cognitivas dos alunos, oferecendo-lhes situações práticas e interativas, dando um novo significado à construção de



conhecimentos matemáticos e a adoção de inovações tecnológicas mediadas pelo professor na sala de aula (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2018).

Relacionar a TD e a Realidade Aumentada (RA) não é uma tarefa fácil para o professor, uma vez que são temas que exigem um planejamento e construção de aspectos metodológicos próprios. De acordo com Lee (2012), no início do ano de 1992, a RA foi utilizada em um artigo científico escrito por Thomas Caudell e David Mizelle. O trabalho dos autores trazia como exemplo a RA no uso de um dispositivo fixado em um capacete para ver objetos em 3D (três dimensões) no ambiente físico. Com o progresso nas TDs, tem sido possível criar diferentes aplicações em RA, a partir de aplicativos instalados em *smartphones*, *notebooks*, *tablets* e computadores, ou ainda, ser levado para um ambiente físico com usuários em movimento.

Neste trabalho, levantamos um questionamento orientador para o professor de matemática: como podem ser evidenciadas as aprendizagens de área e volume com o uso da TD e da RA, associados a materiais concretos do cotidiano dos estudantes? O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta didática para o ensino de áreas e volumes com uso do GeoGebra, associado a moldes de papel enquanto material concreto. Esta proposta foi orientada pelos pressupostos da Sequência Fedathi (SF) em conjunto com a Engenharia Didática (ED).

A ED é designada como uma metodologia de pesquisa originária da Didática da Matemática francesa e tem sido largamente utilizada em nosso sistema educacional, como forma de analisar e compreender fenômenos no âmbito do Ensino de Matemática em sala de aula (ALMOULOU, 2007). Neste trabalho apresentamos as duas primeiras fases da ED (análises preliminares e concepção e análise *a priori*), dado o fato de que este trabalho é uma proposta em desenvolvimento. Temos o intuito de que este seja aplicado futuramente no Ensino de Geometria Plana (GP) e Geometria Espacial (GE) com estudantes da Educação Básica..

## 2 ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Os estudantes enfrentam grandes desafios na aprendizagem da Matemática, que se estendem ao campo da Geometria e suas formas, frequentemente consideradas complexas em trabalhos científicos. Bastos (1999) explica que com a Geometria é possível compreender, analisar e incluir situações no nosso cotidiano, inclusive pensar e ver as representações de novos objetos. Pavanello (2004) sustenta que a Geometria foi,



por muito tempo, excluída do currículo escolar ou, em alguns casos, teve seu ensino restrito, o que impacta a aprendizagem de seus tópicos até os dias atuais. Assim, compreendemos como importante enfatizar seu papel no aprendizado dos alunos.

De acordo com Settimy e Bairral (2020, p. 178), “[...] é necessário dar importância ao ensino de Geometria [...]” para “[...] restabelecer o equilíbrio, assim como desenvolver o pensamento geométrico nas aulas de Matemática”. Bairral (2009) relata que na aula de Geometria, os alunos preferem apenas figuras planas e polígonos, devido a forma simplificada que os conteúdos são apresentados, mas que há outras formas presentes no cotidiano que devem ser consideradas. É importante assimilar que o processo de visualização de imagens descrito com lápis e papel, ou com a ajuda da tecnologia, pode ajudar na aprendizagem e compreensão e associação das Geometrias Plana e Espacial, podendo fazer a correspondência entre as formas geométricas.

É importante embasar o ensino da Geometria por meio da análise de conceitos e problemas que visem auxiliar na compreensão do ambiente em que os alunos estão inseridos. Assim, a BNCC aponta que:

A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos (BRASIL, 2017, p. 271).

O estudo da geometria se desenvolveu a partir de análises e sistematizações das ligações entre figuras planas, objetos geométricos e o espaço, sendo o ponto, a reta e o plano os entes primitivos ensinados desde o início das etapas escolares (BAIRRAL, 2009). A Geometria é apresentada nos livros didáticos com o objetivo de desenvolver nos estudantes habilidades e competências de acordo com as diretrizes específicas da BNCC (2018) e do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2020), que visam a compreensão e resolução de problemas sistematizados e aplicados, de forma contextualizada.

A Geometria é uma área da matemática que, ao longo da Educação Básica, é ensinada com muitas lacunas e fragilidades para os alunos, sendo uma alternativa ao ensino “[...] procedimentos e possíveis métodos que podem ser realizados usando as construções geométricas visualizadas no software GeoGebra” (SANTIAGO; ALVES, 2022, p. 99, tradução nossa). No Ensino Fundamental, muitas ações são direcionadas para reverter essas dificuldades e lacunas nas instituições escolares, como a inserção



das TDs em sala de aula, dado o fato de que os conteúdos de Geometria são apresentados nos livros com poucos problemas matemáticos práticos.

O GeoGebra foi selecionado por ter versões em software para computador, uma versão dinâmica online e aplicativo para telefones celulares, gratuito e de fácil utilização, incluindo diversas opções e comandos para explorar a Geometria Dinâmica com base no conhecimento do estudante e com a possibilidade de abordar diversos temas. É importante lembrar que o aplicativo tem uma interface com código aberto onde:

[...] não oferece apenas oportunidades para professores e alunos usá-los em casa e na sala de aula sem quaisquer restrições, mas também fornece as ferramentas para o desenvolvimento de suporte e comunidades de usuários além das fronteiras. Tal colaboração também contribui para a igualdade de acesso aos recursos tecnológicos e para a democratização do ensino e aprendizagem da matemática. O GeoGebra está disponível em vários idiomas. Usando o GeoGebra, um professor pode criar materiais interativos para resolver as principais tarefas do ensino de Geometria – o desenvolvimento da imaginação espacial, compreensão prática e pensamento lógico (KRAMARENKO; PYLYPENKO; MUZYKA, 2020, p. 706, tradução nossa).

Paulo e Pereira (2022) relatam que GeoGebra com a função Realidade Aumentada (RA) cria um ambiente estimulante para a investigação matemática, pois os objetos construídos podem ser manuseados pelo movimento do controle deslizante na tela 3D ou até mesmo com o comando da RA. Ao observar os objetos geométricos, com as formas pirâmide quadrangular, quadrado, prisma retangular, tetraedro e o cilindro, percebe-se uma visão dinâmica destes objetos em dimensão real.

Com base neste conteúdo, construímos uma proposta de ensino das Geometrias Plana e Espacial usando o GeoGebra, explorando alguns dos seus conceitos com o aporte da RA. Os professores devem estar atentos à excelência dos novos métodos de ensino, seguindo as diretrizes da BNCC e as recomendações atuais das pesquisas sobre o Ensino da Matemática e Educação Matemática, como resolução de exercícios, uso de TDs, história da matemática e aspectos pedagógicos relacionados à interdisciplinaridade com outras áreas do ensino.

### 3 SEQUÊNCIA FEDATHI E ENGENHARIA DIDÁTICA

Segundo Sousa (2015), as origens da SF foram atribuídas ao Professor Hermínio Borges Neto, professor da Universidade Federal do Ceará (UFC). A SF teve início nos anos 80, quando Borges Neto ministrava a disciplina de Fundamentos da Matemática nos cursos de graduação em Matemática da referida universidade. As ideias da SF são de que o professor deve criar um ambiente propício para que o aluno se desenvolva e se



sinta um pesquisador. Neste caso, o estudante é estimulado a resolver problemas como um matemático.

Destacamos que a escolha pela SF se deve à possibilidade de organização de técnicas que abrangem diversas tarefas, além de possibilitar o aprimoramento prático do professor e do estudante do decorrer da ação pedagógica (BORGES NETO, 2018). A SF é uma forma de ensinar matemática que pode ser usada de forma associada às TDs, ao fazer a “[...] mediação pedagógica no intuito de favorecer as investigações matemáticas em aula junto aos docentes e discentes [...]” (SANTANA, 2006, p. 126). A sessão didática estruturada na SF é composta por quatro etapas, denominadas por *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*.

Descrevemos como estas etapas foram ilustradas na proposta de ensino deste trabalho, de forma sucinta, sob a perspectiva dos autores, no Quadro 1:

**Quadro 1 – Descrição das etapas da Sequência Fedathi associadas à proposta de ensino de Geometria**

Etapas	Detalhamento
Tomada de posição	Essa etapa consiste na apresentação do problema para a turma, através da verbalização e da escrita, com uma postura didático-pedagógica voltada para facilitar o entendimento dos moldes geométricos criados no aplicativo GeoGebra, usados para a transposição algébrica do problema para materiais concretos (CAVALCANTE; MENEZES, 2020).
Maturação	O estudante busca resolver o problema por meio da identificação e visualização das variáveis da situação, com a orientação e observação do professor. Inicialmente, é possível que o professor e os alunos discutam sobre o problema proposto, a fim de identificar diferentes caminhos a serem seguidos para a solução, bem como os dados coletados, com o propósito de esclarecer o que ocorre durante a execução da atividade (FONTENELE, 2013).
Solução	Representação e organização de modelos/formas que possam contemplar a solução do problema. Nesta fase, os alunos apresentam as soluções encontradas, e identificam possíveis equívocos, determinando qual solução é a mais adequada para a situação apresentada pelo professor (SOUZA, 2021). Na discussão dessa proposta de ensino, o estudante pode verificar as construções no GeoGebra e realizar movimentos, observando o que ocorre com o objeto matemático virtual e suas medidas.
Prova	Aqui “[...] o estudante faz a verificação da solução encontrada confrontando o resultado com os dados apresentados”. Assim, “[...] o professor faz uma analogia com os modelos científicos preexistentes, formalizando o conhecimento construído e o modelo matemático exposto pelo estudante, na fase da solução” (SANTOS, 2020, p. 99).

Fonte: Elaboração dos autores (2023).

O conhecimento adquirido na SF, intermediado pelo professor, torna a aprendizagem mais significativa e o ensino culmina em uma ação de cooperação entre os educandos e o educador.



No que diz respeito a um quadro teórico sobre a nossa metodologia de pesquisa, que é a Engenharia Didática (ED), esta surgiu na França nos anos 80, como resultado de pesquisas na área de Didática da Matemática. Ela requer um conhecimento científico fundamental e básico, além de lidar com situações práticas que não exigem teoria prévia – interações nas quais é necessário elaborar soluções (ARTIGUE, 1996). Sua elaboração foi concebida ao considerar dois pontos: a relação entre pesquisa e ação no sistema educacional e um lugar para as práticas didáticas entre as metodologias de pesquisa (ARTIGUE, 1995).

Nesta linha, a ED possibilita produções voltadas para o ensino, sendo uma forma de pesquisa que possui um percurso metodológico pautado na experiência em sala de aula. A sua estruturação foi baseada em estudos de autores como Chevallard (1990), Brousseau (1970) e Douady (1995), além de Artigue (1988). Artigue (1995) foi a principal disseminadora da ED e organiza-a em quatro fases análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação; e análise *a posteriori* e validação. Para fins deste trabalho, adotamos apenas as duas primeiras fases, descritas na Tabela 1:

**Tabela 1: Descrição das análises preliminares e concepção e análise *a priori***

Análises	Procedimentos
Preliminares	Realizar a análise epistemológica do conteúdo alvo, caracterizar o conceito a partir da sua origem histórica, o seu estado atual nas diversas situações em que intervém como instrumento e encontrar outros conceitos que interajam e contribuam para dar-lhe significado. Essa etapa envolve a pesquisa sobre os conceitos como objeto de ensino, ou seja, as perspectivas comumente usadas para a concepção e como ela evoluiu por meio de mudanças curriculares, questões de avaliação, papéis do professor, entre outros fatores, como a investigação do comportamento do aluno (erros, dificuldades, conceitos, comportamentos).
Concepção e <i>a priori</i>	O investigador define quais as variáveis (de ensino) serão estudadas, divididas em: macrodidáticas - relevantes para a organização global da ED e microdidáticas - relevantes para a organização local da ED, ou seja, as sessões ou sequências de ensino. As variáveis do problema são situacionais, relacionadas à organização e gestão do meio em que se dará a implementação da sequência de ensino. O objetivo da análise <i>a priori</i> é, inicialmente, determinar como as escolhas são feitas com base no possível comportamento do aluno e o significado dessas ações.

Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Na seção seguinte estruturamos a metodologia desta proposta de ensino, com base nos pressupostos da SF e da ED.



## 4 METODOLOGIA

A metodologia desta proposta de ensino tem natureza qualitativa, do tipo exploratória que envolve uma abordagem em que os pesquisadores estudam as questões em seus cenários reais (DENZIN; LINCOLN, 2006), baseada em trabalhos recentes que envolvem a temática. Segundo Gil (2008), a pesquisa exploratória proporciona maior familiaridade com o problema proposto em vários aspectos científicos.

No caso deste trabalho, a estruturação foi a partir da articulação entre a Engenharia Didática (ED) e seu percurso enquanto metodologia de pesquisa e a Sequência Fedathi (SF) como metodologia de ensino. Dessa forma, considerando que este trabalho está em andamento, utilizamos apenas as duas primeiras etapas da ED – análises preliminares e *a priori*.

Nas análises preliminares procuramos levantar as questões em Geometria Plana e Espacial, sobretudo no estudo de área e volume estudados com material concreto (moldes de papel), levando em consideração o ponto de vista de autores que trabalham com a temática voltada para Educação Básica, buscando compreender o panorama de ensino atual do tema. A BNCC propõe o uso de tecnologias digitais no ensino de Geometria Plana - área em consonância com a Geometria Espacial - volume dos Poliedros e Corpos Redondos (BRASIL, 2018).

Na concepção e análise *a priori* realizamos o planejamento de ações didáticas a partir das variáveis macrodidáticas e microdidáticas (ARTIGUE, 1988). Essas variáveis se relacionam ao conteúdo matemático a partir de três dimensões: (i) epistemológica, em que se busca uma caracterização do saber; (ii) cognitiva, onde se observa a dimensão intelectual dos estudantes na aprendizagem do conteúdo, e; (iii) didática, que abrange a dimensão do sistema de ensino, no qual os estudantes estão inseridos.

Almouloud, Queiroz e Coutinho (2008) explicam que na análise *a priori* realizam-se escolhas pré-determinadas, no intuito de controlar os comportamentos dos estudantes e explicar o seu significado no decorrer da aplicação de uma sequência didática.

Com base nisso, organizamos a planificação de alguns objetos geométricos no GeoGebra, utilizando o comando RA para animação das construções, como uma estratégia para permitir a visualização e incentivar os alunos a criar formas geométricas com moldes de papel de forma associada ao aplicativo. Além disso, é possível utilizar a câmera do celular ou *tablet* para leitura do QR Code (*Quick Response Code*) de cada forma geométrica criada com estilo de observação em 3 (três) dimensões (2D, 3D e RA).



Para o desenvolvimento desta proposta de ensino, utilizamos a SF, que foi desenvolvida como método científico. Ela é composta também por quatro etapas didáticas: tomada de posição (introdução do problema matemático), maturação, solução e prova em combinação com as duas primeiras fases da ED.

## 5 DESENVOLVIMENTO

### 5.1 Análises preliminares

No que diz respeito às análises preliminares, identificamos problemas de ensino e aprendizagem relacionados a GP e GE. A partir da sistemática, delineamos as questões (situações) e formulamos algumas hipóteses que permitem uma investigação *a posteriori*, de forma empírica. Destacamos dois elementos: a) análise organizacional do conteúdo matemático e b) análise didática do objeto matemático selecionado.

Dessa forma, no que diz respeito ao elemento (a), atentamos ao estudo da gênese histórica que envolve a GP e GE, suas limitações e obstáculos no uso de tecnologias como recurso didático, como o GeoGebra, dificuldades relacionadas aos seus conceitos, que são por vezes reconhecidos como complexos e aqueles que não estão presentes em livros didáticos, bem como a estrutura atual de seu ensino.

Em relação ao item (b) ressaltamos a relevância da análise de livros didáticos. Uma análise de livros do Ensino Médio, “[...] buscando compreender o ensino proposto e suas (possíveis) consequências para a aprendizagem, tornou-se incontornável (BITTAR, 2017, P. 365). Ao analisar os livros da coleção de Dante (2016a, 2016b, 2016c), observamos que o autor enfatiza os conceitos básicos da GP e GE, uma breve noção da história da matemática dos conteúdos, aspectos do cotidiano e de aplicação são desconsiderados, bem como a visualização e a significado geométrico das simbologias são negligenciados.

Com base nessa análise, formulamos as hipóteses de trabalho a serem desenvolvidas posteriormente em investigação empírica:

1ª) A mediação condicionada à abordagem padrão dos livros sobre os tópicos de GP e GE não permite a visualização dos objetos geométricos;

2ª) As situações de aprendizagem descritas nos exercícios propostos pelos autores dos livros permitem apenas uma aquisição de habilidades simples, com uso de fórmulas sistematizadas, manipuladas por pequenos sistemas que evidenciam resultados de significado limitado.



## 5.2 Concepção e Análise *a priori*

A concepção e análise *a priori* desta proposta didática visa introduzir o ensino de áreas e volumes de figuras planas, estruturadas a partir de objetos dinâmicos, com o suporte do aplicativo GeoGebra na função Realidade Aumentada, sendo a SF a metodologia norteadora do processo de ensino.

Para efeito de sistematização, assumiremos que uma situação inclui a seleção de “questões abertas e/ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber” (ALMOULOU, 2007, p. 174). Nesse sentido, destacam-se elementos como as situações em que pretendemos explorar os conteúdos geométricos e os conhecimentos relacionados à GP e à GE para a resolução das questões.

## 6 RESULTADOS PARCIAIS E DISCUSSÃO

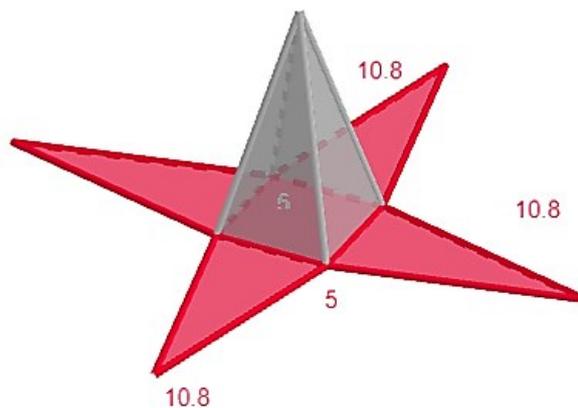
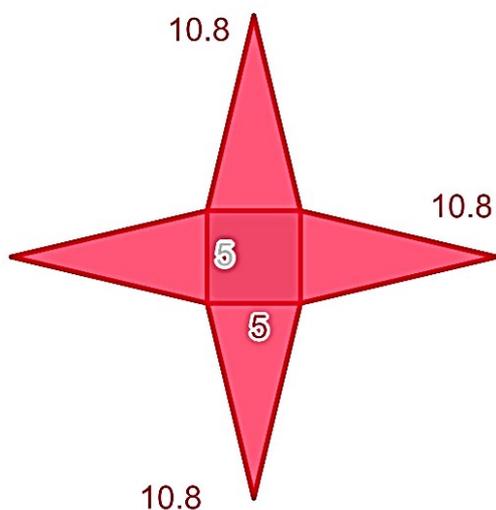
Para a estruturação desta proposta didática foi sugerida uma situação contextualizada, de modo a incentivar o interesse e o pensamento geométrico do aluno. O professor pode disponibilizar a impressão física do problema e das construções realizadas no GeoGebra, para que os alunos possam visualizar os objetos geométricos e elaborar hipóteses para a solução do problema. No Quadro 2, temos a situação didática proposta:



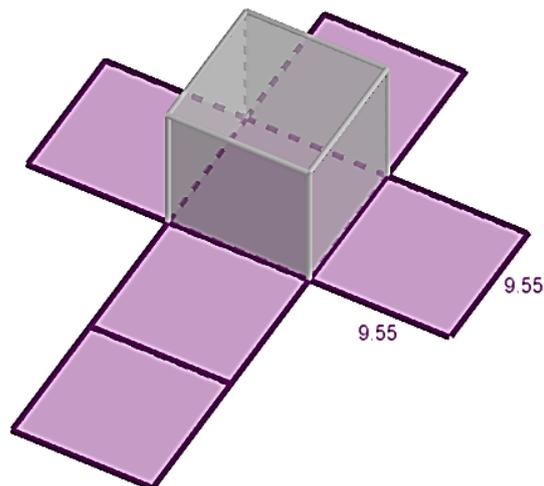
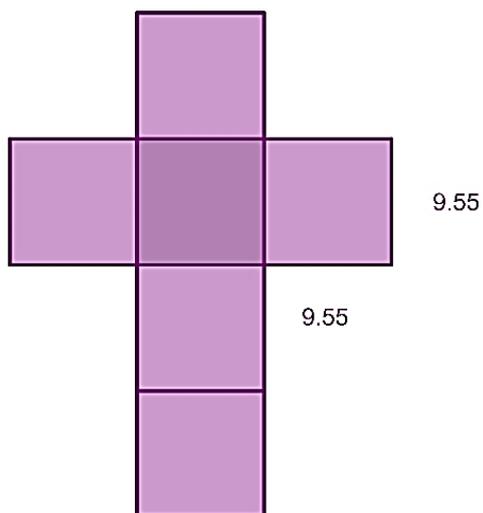
### Quadro 2 – Situação didática proposta

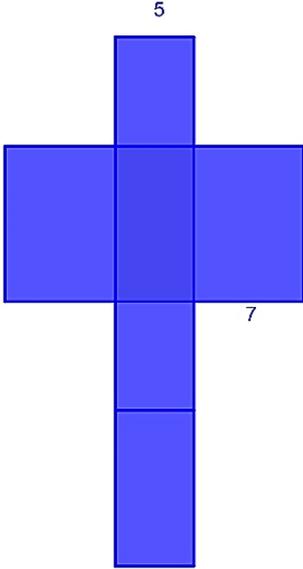
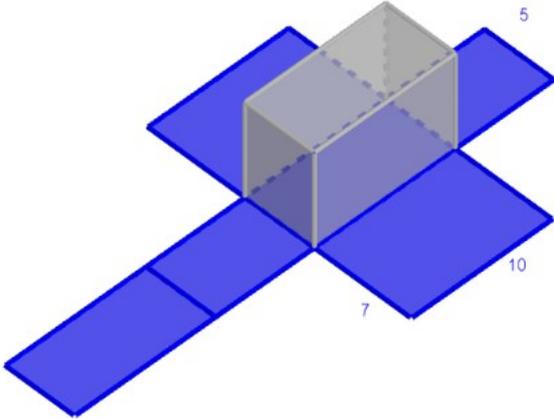
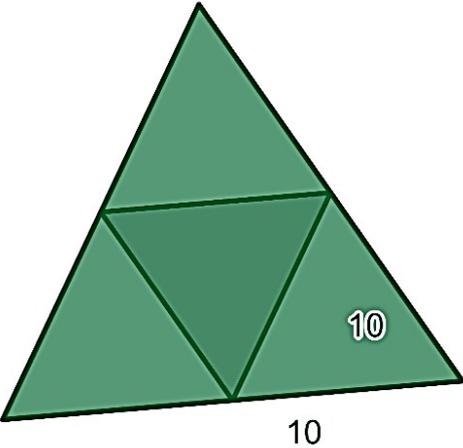
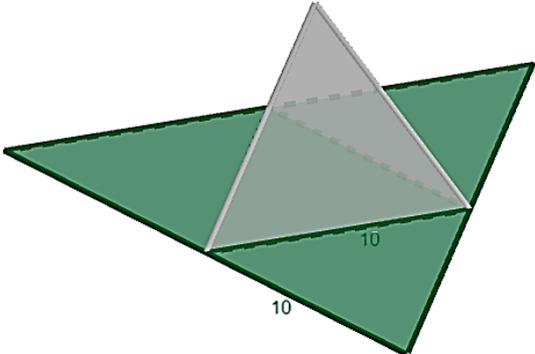
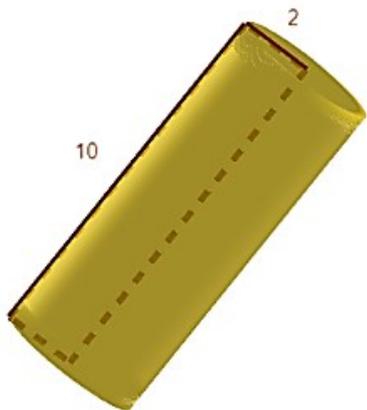
Lara quer inovar em sua loja de cosméticos com embalagens geométricas e decidiu medir o tamanho de cada uma delas por completo. As imagens apresentadas mostram as planificações e os objetos montados em 3D dessas caixas, sabendo que as medidas estão descritas em cada uma delas. Quais os valores da área e volume de cada embalagem na loja da Lara?

Pirâmide Quadrangular (base mede 5 cm e a altura 10,8 cm)



Quadrado (lados mede 9,55 cm)



Prisma Retangular (largura 5 cm, comprimento 10 cm, altura 7 cm)	
	
Tetraedro (lados medem 10 cm)	
	
Cilindro (raio mede 2 cm e a altura 10 cm)	
	

Fonte: Elaboração dos autores (2023).



Dessa forma, é esperado que, na *Tomada de posição*, o aluno tenha explore o aplicativo GeoGebra e realize uma leitura atenta do enunciado da questão, observando os elementos presentes em cada construção geométrica para elaborar estratégias para a solução do problema.

Durante essa fase, em geral, os alunos ainda não dominam o uso do aplicativo e a base conceitual matemática a ser ensinada, então o docente deve fazer uma mediação utilizando outras situações e exemplos básicos, instigando-os com perguntas direcionadas. A realização de perguntas nesta primeira etapa permite ao professor identificar possíveis erros e analisar os resultados que podem ser alcançados pelo estudante na solução do problema.

Na *Maturação*, o aluno é acompanhado pelo professor, que busca os registros da solução, observando desde o início da aplicação. Todas as resoluções podem ser fundamentadas na resolução da área e volume dos objetos geométricos solicitadas pelo problema. É importante destacar que todos os estudantes devem ter acesso ao QR Code e ao *link* (Quadro 3) fornecido pelo professor, para explorar as dimensões de cada figura, desenvolvendo competências e habilidades relacionadas à visualização do espaço e forma:

**Quadro 3 – Códigos de acesso e link das construções no GeoGebra**

Links	QR Code
Pirâmide Quadrangular <a href="https://www.geogebra.org/m/s9bgxvfu">https://www.geogebra.org/m/s9bgxvfu</a>	
Quadrado <a href="https://www.geogebra.org/m/c4efug4c">https://www.geogebra.org/m/c4efug4c</a>	
Prisma Retangular <a href="https://www.geogebra.org/m/qbudzjmr">https://www.geogebra.org/m/qbudzjmr</a>	

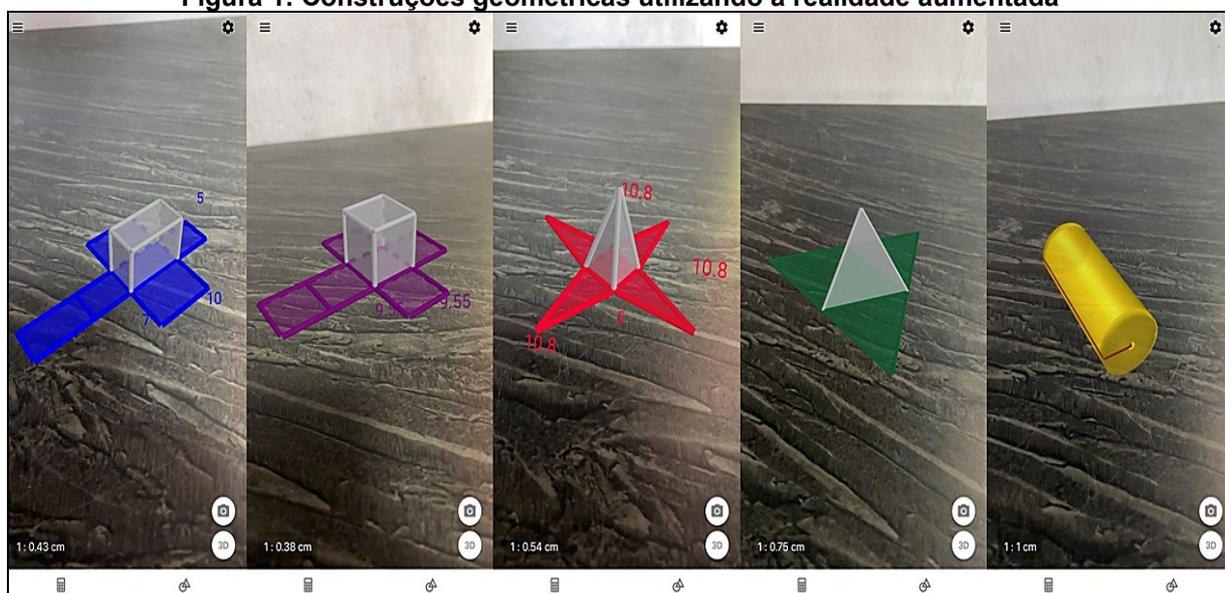
Tetraedro <a href="https://www.geogebra.org/m/mcaxcsuu">https://www.geogebra.org/m/mcaxcsuu</a>	
Cilindro <a href="https://www.geogebra.org/m/crcj2ybb">https://www.geogebra.org/m/crcj2ybb</a>	

Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Após ver os objetos, continua-se a observação. É possível que algumas dúvidas venham a surgir durante a aplicação, sobre aspectos das figuras. A partir deste ponto, é possível também fazer perguntas direcionadas ao aplicativo, como quais são as figuras de fácil compreensão e quais os conceitos que podem ser incorporados ao GeoGebra para realizar a tarefa. Dessa forma, as construções que o aluno visualiza podem ser interpretadas e compreendidas, de acordo com o nível de conhecimento matemático de cada um.

Durante o desenvolvimento da *solução*, espera-se que o estudante se concentre na experiência significativa do ensino. É possível explorar as construções no aplicativo GeoGebra utilizando o comando RA (Realidade Aumentada), incentivando a curiosidade e estimulando o raciocínio geométrico e percepção de características de cada figura espacial, conforme ilustrado na Figura 1:

**Figura 1: Construções geométricas utilizando a realidade aumentada**

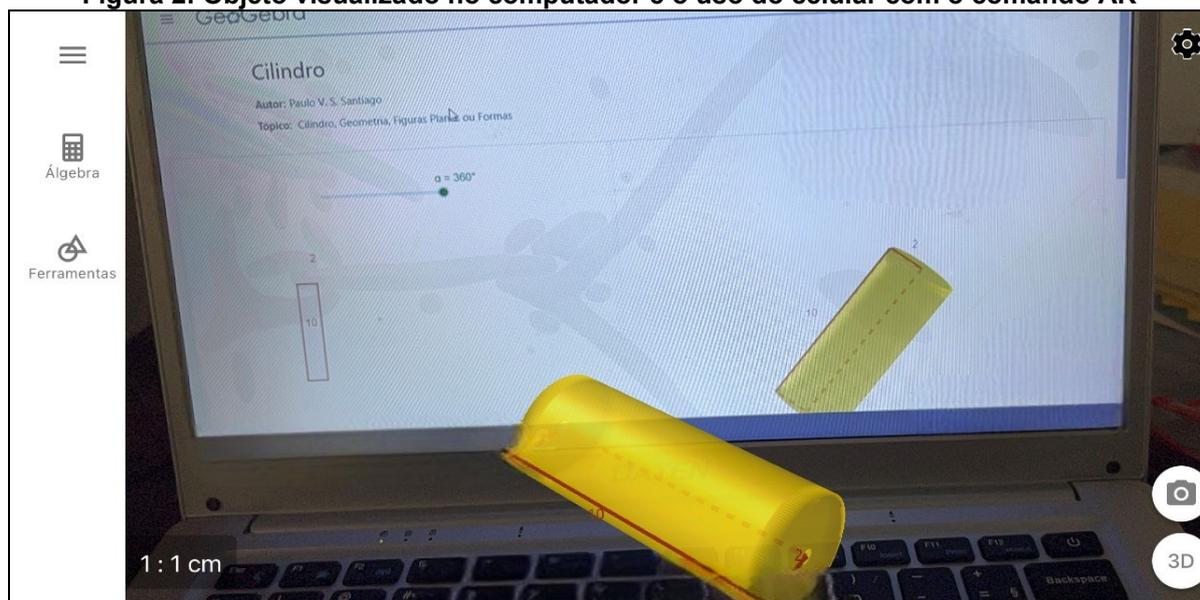


Fonte: Elaboração dos autores (2023).



Nesta etapa, é esperado que os estudantes movimentem os objetos com os dedos na tela do telefone ou *tablet*, posicionando-os de modo correspondente às medidas apresentadas no problema. Os estudantes podem notar que no modo 3D o controle deslizante (Mover) é compatível com os pontos de cada construção geométrica. Além disso, espera-se que eles busquem visualizar o formato de cada figura ao arrastar o Mover, que é 1 a cada movimento, que corresponde à secção visualizada no computador e na realidade aumentada (Figura 2):

Figura 2: Objeto visualizado no computador e o uso do celular com o comando AR



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Almeja-se que o estudante entenda que o formato de cada objeto em 3D é igual a uma forma geométrica e que, a partir disso, use o comando RA para ver a construção final com as medidas descritas. A *Maturação* da solução de forma adequada mostra que o estudante entendeu as formas geométricas com base nos seus conhecimentos prévios (BORGES NETO, 2018), como na Tomada de posição, em que as medidas em cada figura correspondem aos valores da largura, comprimento e altura. Na terceira fase - a *Solução* -, esperamos que o estudante resolva o problema por meio dos cálculos de área e volume dos objetos apresentados no Quadro 2, chegando às conclusões.

Como aponta Souza (2021, p. 777) os “[...] modelos de construções geométricas, aproximando-se das resoluções tipicamente exploradas no ambiente lápis e papel, mostrando-se como uma tentativa de transposição direta da mesma abordagem para o ambiente informático”. Dessa forma, esperamos que, ao utilizar o celular/*tablet* com o controle deslizante (Mover) e o comando RA no aplicativo GeoGebra, o estudante

perceba os aspectos relativos à planificação de cada objeto e o movimento em realidade virtual da figura espacial em RA, conforme demonstrado na Figura 1.

Na fase de *Prova*, o professor pode realizar “[...] intersecções de pontos, retas e circunferências, da visualização dos objetos, onde as relações de intersecção ou sobreposição só eram percebidas, na maioria das vezes, quando as figuras eram movimentadas” (SOUZA, 2021, p. 778). Temos uma proposta para ser discutida na fase de de prova, organizada no Quadro 4:

**Quadro 4 – Aspectos de cada objeto matemático**

Objeto	Resoluções
Pirâmide Quadrangular	Apótema: $g^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + h^2 \rightarrow g^2 = (2,5)^2 + 10,8^2 \cong 11,09 \text{ cm}$
	Área lateral: $Al = \frac{g \cdot h}{2} \rightarrow \frac{11,09 \cdot 10,8}{2} \cong 59,89 \text{ cm}^2$
	Área base: $Ab = l \cdot l \rightarrow 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$
	Volume: $V = \frac{Ab \cdot h}{3} \rightarrow \frac{25 \cdot 10,8}{3} = 90 \text{ cm}^3$
Quadrado	Área base: $Ab = l \cdot l \rightarrow 9,55 \cdot 9,55 \cong 91,20 \text{ cm}^2$
	Volume: $V = l^3 \rightarrow 9,55 \cdot 9,55 \cdot 9,55 \cong 870,98 \text{ cm}^3$
Prisma Retangular	Área da superfície: $As = 2(b \cdot l + l \cdot h + h \cdot b) \rightarrow 2(5 \cdot 10 + 10 \cdot 7 + 7 \cdot 5)$ $As = 2(50 + 70 + 35) \rightarrow 2 \cdot 155 = 310 \text{ cm}^2$
	Volume: $V = l \cdot b \cdot h \rightarrow 10 \cdot 5 \cdot 7 = 350 \text{ cm}^3$
Tetraedro	Área da superfície: $As = a^2 \sqrt{3} \rightarrow 10^2 \sqrt{3} = 100 \sqrt{3} \text{ cm}^2$
	Volume: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \rightarrow \frac{10^3 \sqrt{2}}{12} \rightarrow \frac{1000 \sqrt{2}}{12} \cong 117,85 \text{ cm}^3$
Cilindro	Área da base: $Ab = \pi r^2 \rightarrow 3,14 \cdot 2^2 = 12,56 \text{ cm}^2$
	Área lateral: $Al = 2\pi \cdot r \cdot h \rightarrow 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10 = 125,6 \text{ cm}^2$
	Volume: $V = \pi r^2 \cdot h \rightarrow 3,14 \cdot 2^2 \cdot 10 = 125,6 \text{ cm}^3$

Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Sugere-se que o professor faça uma revisão sobre os conceitos básicos de áreas de volumes das figuras planas e espaciais, mas, sobretudo, mostre aos estudantes a relação entre cada figura geométrica nas formas plana e espacial de maneira associada, apresentando o aplicativo GeoGebra e suas planificações em RA. A definição de prova é apresentada em Santos (2020, p. 99) como a “etapa em que o estudante faz a verificação da solução encontrada confrontando o resultado com os dados apresentados”. Dessa



forma, o professor precisa fazer uma comparação com os modelos geométricos existentes, aplicando o método de aprendizagem e o modelo geométrico descoberto pelo aluno, na terceira etapa da SF (Solução).

Em relação ao uso da ED, esta metodologia de pesquisa torna o *design* crítico, fornecendo diversas teorias e recursos para pesquisa de implementação (ARTIGUE, 1995). Assim, o uso da ED é colocado principalmente a serviço da compreensão da sistemática da proposta didática, no intuito de produzir fenômenos didáticos para que o professor e estudantes possam estabelecer a existência de aplicações destes conhecimentos.

Santos (2020) descreve que a SF é um processo de ensino que mostra alguns paradigmas fluentes da metodologia e epistemologia do docente, ou seja, pode ser focado no estudo e discussão das unidades curriculares existentes na BNCC. Dessa forma, destacamos que os currículos escolares necessitam enfatizar o letramento matemático, podendo adotar a SF em alguns momentos.

A SF possibilita ao estudante a compreensão do problema no processo de aprendizagem e seu uso associado à TD pode ser eficaz. A aplicação da situação didática no ensino de Geometria Plana e sua transição para a Geometria Espacial com o aplicativo possibilita a interação de informações e a visualização do objeto em realidade virtual. O professor, consciente da importância deste aspecto, pode acrescentar a sua sequência didática uma exploração do conceito de construção geométrica enquanto trabalha os conceitos geométricos.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A implementação dessa proposta didática depende da Engenharia Didática para ser efetivada. É importante que a situação explorada no aplicativo GeoGebra permita a compreensão de formas geométricas descritas/desenhadas no papel e sua associação ao formato da Realidade Aumentada em um ambiente interativo físico, por meio da conexão das fases da Sequência Fedathi no ensino de Geometria Plana e Geometria Espacial. Essa metodologia pode ajudar o estudante a compreender os conteúdos relacionados à Geometria.

As análises preliminar e a priori realizadas sugerem que o uso do GeoGebra é viável para melhoria e apropriação dos conteúdos de área e volume de objetos geométricos, possibilitando a estruturação da percepção cognitiva do estudante, o que



seria diferente se o problema aplicado fosse ao ensino tradicional, com apenas papel e lápis. O GeoGebra, por meio de seus comandos, permite construir objetos matemáticos em 2D, 3D e RA em ambientes físicos reais, sendo um recurso dinâmico que propicia a prática e experimentação de conceitos fundamentais da Geometria.

As limitações deste estudo se devem às dificuldades encontradas em outros trabalhos metodológicos que dinamizem a Geometria Plana utilizando moldes e a Geometria Espacial usando RA, focando principalmente no estudo de Poliedros e Corpos Redondos, o que evidencia a relevância deste tópico no âmbito científico.

Neste trabalho procuramos objetos planos para formas tridimensionais, com o objetivo de apresentar uma abordagem diferente das que são apresentadas nos livros didáticos escolares, saindo do modelo tradicional de ensino e buscando apresentar um conteúdo de forma visual e compreensível ao aluno.

Em uma perspectiva futura, almejamos que este trabalho seja desenvolvido em sala de aula, por professores de Matemática, e que este possa minimizar as barreiras existentes no manuseio dos recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem sobre o tema.

## REFERÊNCIAS

- ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.
- ALMOULOU, S. A.; QUEIROZ, C. de; COUTINHO, S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.
- ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.
- ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *In*: ARTIGUE, M. *et al.* **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995, p. 97-140.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. *In*: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.
- ARTIGUE, M. Perspectives on design research: The case of didactical engineering. *In*: BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. (Eds.). **Approaches to qualitative research in mathematics education**, Springer, 2014, p. 467-496. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6\\_17](https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_17). Acesso em: 18 fev. 2023.
- ARTIGUE, M. *et al.* The French didactic tradition in mathematics. *In*: BLUM, W.; ARTIGUE, M.; MARIOTTI, M. A.; STRÄBER, R.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Eds.). **European traditions in didactics of mathematics. ICME-13 Monographs**,



Springer, 2019, p. 11–56. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1_2). Acesso em: 3 fev. 2023.

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática**. Série InovaComTic, v. 1. Rio de Janeiro: Edur, 2009.

BASTOS, R. **Geometria no currículo e pensamento matemático**. 1999. Disponível em: <https://bit.ly/2D2y24i>. Acesso em: 04 dez. 2022.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364-387, 2017. DOI: 10.20396/zet.v25i3.8648640. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640>. Acesso em: 28 jul. 2023.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases digitais em educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 2. ed. 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORGES NETO, H. **Sequência Fedathi: fundamentos**. v. 3. Curitiba, PR: CRV, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio**. Catálogo do Programa Nacional do Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB/PNLEM, 2020.

CAVALCANTE, R. N. B.; MENEZES, D. B. Medindo altura de coqueiros no pátio da escola: uma atividade prática com a Sequência Fedathi. *In*: Castro, P. A. de. (Org.). **Avaliação: Processos e Políticas** Campina Grande: Realize Eventos Científicos & Editora, 2020.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto & aplicações**. 3ª ed., v. 1, São Paulo: Ática, 2016a.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto & aplicações**. 3ª ed., v. 2, São Paulo: Ática, 2016b.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto & aplicações**. 3ª ed., v. 3, São Paulo: Ática, 2016c.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. *In*: DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

DOUDAY, R. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia. *In*: ARTIGUE, M.; DOUDAY, R. E.; GÓMEZ, M. L., **Ingeniería Didáctica en educación**, p. 1–7, 1995.

FONTENELE, F. C. F. **A Sequência Fedathi no ensino da álgebra linear: o caso da noção de base de um espaço vetorial**. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/7521>. Acesso em: 04 fev. 2023.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

KRAMARENKO, T. H.; PYLYPENKO, O. S.; MUZYKA, I. O. Aplicação do GeoGebra no ensino de Estereometria. **CTE Workshop Proceedings**, Kryvyi Rih, Ucrânia, v. 7, p. 705-718, 2020. Disponível em: <https://acnsci.org/journal/index.php/cte/article/view/418>. Acesso em: 6 abr. 2023.



LEE, K. Augmented Reality in Education and Training. **TechTrends**, v. 56, n. 2, p. 13-21, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11528-012-0559-3>. Acesso em: 6 fev. 2023.

PAULO, R. M.; PEREIRA, A. L. Aspectos metodológicos de una investigación sobre la enseñanza del cálculo con realidad aumentada. **PARADIGMA**, v. 43, n. 2, p. 82-104, 2022. Disponível em: <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/1219>. Acesso em: 8 abr. 2023.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar/aprender geometria**. Trabalho apresentado no VII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo: 2004. Disponível em: <https://bit.ly/39GoLKX>. Acesso em: 01 set. 2023.

SANTANA, J. R. **Educação matemática: favorecendo investigações matemáticas através do computador**. 2006. 430f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2006.

SANTIAGO, P. V. S. **Olimpíada Internacional de Matemática: situações didáticas olímpicas no ensino de geometria plana**. 2021. 160 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V. Math for olympiad: a didactic proposal for high school from the perspective of the international mathematical olympiad. **Journal of Advanced Sciences and Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p. 97-108, 2022. Disponível em: [10.58524/jasme.v2i2.135](https://doi.org/10.58524/jasme.v2i2.135). Acesso em: 19 fev. 2023.

SANTOS, M. J. C. O letramento matemático nos anos iniciais do ensino fundamental. **REMATEC: Revista de Matemática**, Ensino e Cultura, Ano 15, Fluxo Contínuo, p. 96-116, 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p96-116.id238>. Acesso em: 16 fev. 2023.

SETTIMY, T. F. de O.; BAIRRAL, M. A. dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020. Disponível em: [10.37781/vidya.v40i1.3219](https://doi.org/10.37781/vidya.v40i1.3219). Acesso em: 20 fev. 2023.

SOUSA, F. E. E. de. **A pergunta como estratégia de mediação didática no ensino de matemática por meio da Sequência Fedathi**. 2015. 282 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/14363>. Acesso em: 01 dez. 2022.

SOUZA, M. J. A. Aplicando a Sequência Fedathi no ensino da Geometria Plana. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n. 23, p. 768-780, 2021. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5133>. Acesso em: 2 abr. 2023.

