



TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DE PROVAS DO ENEM E DA OBMEP E SUGESTÕES DE RECURSOS DIDÁTICOS PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Hélio Henrique Ferreira Lins¹
Edson Gabriel dos Santos Duca²
Claudia de Oliveira Lozada³

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os resultados finais de uma pesquisa realizada no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal de Alagoas. O objetivo da pesquisa foi analisar as questões das provas do ENEM e da OBMEP que abordam conteúdos de Trigonometria e como podem ser trabalhadas em sala de aula, averiguando o seu nível de dificuldade, seguindo-se com análise de como o conteúdo de Trigonometria é abordado em livros didáticos do Ensino Médio com sugestões de materiais didáticos para a melhoria do processo ensino-aprendizagem dos conceitos de Trigonometria no Ensino Médio. Os resultados da pesquisa demonstraram que são poucas questões das provas do ENEM e OBMEP que abordam conceitos de Trigonometria, que em geral os livros procuram trazer questões contextualizadas, assim como os jogos selecionados procuram focar na compreensão dos conceitos, o que nos levou a elaboração de materiais didáticos, como trilha de aprendizagem, jogos digitais, vídeos e episódios de Podcast no sentido de contribuir para o processo ensino-aprendizagem de Trigonometria no Ensino Médio, trazendo uma proposta que atribua significado aos conceitos por meio de suas aplicações.

Palavras-chave: Trigonometria. Materiais Didáticos. Processo Ensino - Aprendizagem.

TRIGONOMETRY IN HIGH SCHOOL: AN ANALYSIS OF ENEM AND OBMEP TESTS AND SUGGESTIONS FOR DIDACTIC RESOURCES FOR THE TEACHING AND LEARNING PROCESS

ABSTRACT

In this work we present the final results of a research carried out within the scope of the Institutional Program of Scholarships for Scientific Initiation of the Federal University of Alagoas. The objective of the research was to analyze the questions of the ENEM and OBMEP tests that address Trigonometry content and how they can be worked in the classroom, ascertaining their level of difficulty, followed by an analysis of how the Trigonometry content is approached. in high school textbooks with suggestions for teaching materials to improve the teaching-learning process of trigonometry concepts in high school. The research results showed that there are few questions in the ENEM and OBMEP tests that address concepts of Trigonometry, that in

¹ Licenciando em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8802-2404>. E-mail: he2henrique@gmail.com

² Licenciando em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4371-1377>. E-mail: edsonsd@hotmail.com.br

³ Doutora em Educação (USP), Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1425-9956>. E-mail: claloz@yahoo.com.br



general the books seek to bring contextualized questions, as well as the selected games that seek to focus on the understanding of the concepts, which led us to the elaboration of didactic materials, such as a learning trail, digital games, videos and Podcast episodes in order to contribute to the teaching-learning process of Trigonometry in High School, bringing a proposal that attributes meaning to concepts through their applications.

Keywords: Trigonometry. Teaching materials. Teaching - Learning Process.

TRIGONOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA: UN ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS ENEM Y OBMEP Y SUGERENCIAS DE RECURSOS DIDÁCTICOS PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

RESUMEN

En este trabajo presentamos los resultados finales de una investigación realizada en el ámbito del Programa Institucional de Becas de Iniciación Científica de la Universidad Federal de Alagoas. El objetivo de la investigación fue analizar las preguntas de las pruebas ENEM y OBMEP que abordan contenidos de Trigonometría y cómo se pueden trabajar en el aula, determinando su nivel de dificultad, seguido de un análisis de cómo se aborda el contenido de Trigonometría en alta. libros de texto escolares con sugerencias de materiales didácticos para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de trigonometría en la escuela secundaria. Los resultados de la investigación mostraron que son pocas las preguntas en las pruebas ENEM y OBMEP que abordan conceptos de Trigonometría, que en general los libros buscan traer preguntas contextualizadas, así como los juegos seleccionados que buscan enfocarse en la comprensión de los conceptos, que nos llevó a la elaboración de materiales didácticos, como una ruta de aprendizaje, juegos digitales, videos y episodios de Podcast con el fin de contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría en la Educación Secundaria, trayendo una propuesta que atribuye significado a los conceptos a través de sus aplicaciones.

Palabras clave: Trigonometría. Materiales de enseñanza. Proceso de Enseñanza - Aprendizaje.

INTRODUÇÃO

São notórias as dificuldades dos alunos do Ensino Médio em relação aos conceitos de Trigonometria, considerados muito abstratos, além de que as aplicações desses conceitos na maioria das vezes não são abordadas nas aulas de Matemática (WEBER, 2005; GÜR, 2009; MOORE, 2012). Assim, o ensino acaba se reduzindo à longas demonstrações de fórmulas trigonométricas e mecanização de procedimentos, sem correlação com situações do cotidiano.

Por outro lado, também não são utilizados materiais manipuláveis ou digitais para que os alunos façam as construções e compreendam os conceitos visualizando as relações trigonométricas e de que forma se situam nas figuras e nas situações-problema. Não há também uma abordagem histórica dos conceitos de Trigonometria, dando a impressão de que os conceitos foram construídos atemporalmente, como um conjunto de teorias matemáticas com formalizações complexas.

Assim, o ensino de Trigonometria mostra-se tecnicista, sem nenhuma perspectiva de problematização e contextualização tornando-se árduo o processo de ensino e de aprendizagem. Desse modo, ensinar Trigonometria no Ensino Médio



tornou-se um grande desafio, demonstrando a dificuldade que muitos professores enfrentam e que começam inclusive na formação inicial com abordagem excessivamente procedimental.

Brito e Morey (2004, p. 11) colocam que “na maior parte das vezes, o fato de que os professores tiveram em seus cursos de graduação pouca ênfase no ensino de geometria e praticamente nenhuma no de trigonometria”, pode levar muitos docentes a terem dificuldades de ministrar os conteúdos de Trigonometria por não conhecê-los com profundidade e não se sentirem seguros de abordá-los. As autoras propuseram um curso de formação docente e identificaram as dificuldades que os professores apresentam em relação ao conteúdo de Geometria e Trigonometria. A primeira delas diz respeito ao conceito de semelhança de triângulos, mais especificamente a construção de triângulos retângulos quaisquer que, segundo as autoras, os professores afirmavam serem semelhantes apenas pelo fato de terem um ângulo reto.

Outra dificuldade surgiu quando os professores realizavam atividades que envolviam as expressões “cateto oposto” e “cateto adjacente”, sendo que os professores ficaram surpresos pelo fato das expressões não se relacionarem à posição do triângulo retângulo e sim a um dos ângulos agudos. Percebeu-se, também, a dificuldade com que os professores manipulavam os instrumentos de desenho geométrico na realização das atividades, como transferidor e compasso, o que demonstra a necessidade de na formação inicial terem aulas práticas com material concreto.

Watanabe (1996) aponta como dificuldade dos alunos a transição das razões trigonométricas para as funções periódicas e porque ora são colocadas em graus e ora são colocadas em radianos, o que causa certa confusão para os alunos.

Uma outra dificuldade enfrentada pelos professores é apontada por Lima (2001, p. 47) em relação ao livro didático: “demasiadamente longo, com ênfase em trivialidades, omissões importantes, conceitos mal definidos e ausência de problemas conceituais atraentes”. Os livros trazem o conteúdo de Trigonometria com expressões em demasia e pouca aplicabilidade dos conceitos no cotidiano, ou seja, há um excesso de formalismo matemático, além da tentativa de reduzir o ensino de Trigonometria à tabela de valores trigonométricos.

Costa (1997) aponta que há conteúdos de Trigonometria que exigem alta abstração por parte dos alunos e para minimizar essa questão, sugere que o professor traga para a sala de aula atividades práticas com material manipulável seguidas de atividades com softwares de geometria dinâmica, como o Geogebra, que é recomendado por Azevedo e Alves (2019) para o ensino de Trigonometria.

Ainda sobre a abstração acerca dos conteúdos de Trigonometria, é preciso observar a questão dos registros de representação semiótica na construção e compreensão dos conceitos matemáticos. Duval (2009) sinaliza que a abstração pode derivar da dificuldade que os alunos têm de conceitualizar os objetos matemáticos e formar tipos de representação desses objetos matemáticos e fazer a transformação de um registro de representação para outro, o que envolve operações cognitivas apoiadas na semiótica, que muitas vezes não foram devidamente desenvolvidas.

Por outro lado, Gomes (2015) recomenda que o ensino de Trigonometria tenha enfoque geométrico e histórico e que apresente questões que envolvam a investigação e o raciocínio, e Bastian e Almouloud (2003) também defendem a abordagem histórica no ensino da Trigonometria. É essencial a apresentação da parte histórica da Trigonometria e seus fundamentos rudimentares que, segundo Costa (2003) surgiram no Egito e na Babilônia, a partir de cálculos envolvendo razões entre



os lados de triângulos semelhantes, bem como a contribuição da Trigonometria para a Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Sobre o conteúdo de Trigonometria na BNCC (BRASIL, 2018) estes aparecem duas vezes expressamente em habilidade de unidades temáticas diferentes:

Números e Álgebra - (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria; Geometria e Medidas - (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos (BRASIL, 2018, p. 545).

Assim, pontuamos que embora a Trigonometria esteja disposta em apenas duas habilidades na BNCC, ela não pode ser vista de modo restrito no sentido de que se deva ter como objeto de conhecimento somente aquele expresso nas duas habilidades, mas sim expandir para os demais conteúdos, visto que a Trigonometria abrange outros conteúdos cuja compreensão dependem da relação que se estabelece entre eles.

Deste modo, visando contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de conceitos de Trigonometria no Ensino Médio é que procedemos a uma pesquisa de natureza qualitativa no âmbito do PIBIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, analisando as questões das provas do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) do período de 2018 a 2020 que abordam conteúdos de Trigonometria e como podem ser trabalhadas em sala de aula, averiguando o seu nível de dificuldade, seguindo-se com análise de como o conteúdo de Trigonometria é abordado em livros didáticos do Ensino Médio com sugestões de materiais didáticos para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Trigonometria no Ensino Médio, no caso jogos digitais e não digitais, e os recursos didáticos que foram desenvolvidos.

A PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986) foi realizada em quatro etapas: a primeira etapa consistiu na análise de provas da OBMEP e do ENEM no período de 2018 a 2020, a segunda etapa foi referente à análise de coleções de livros didáticos, a terceira etapa destinava-se ao levantamento de materiais didáticos, no caso jogos para o ensino de Trigonometria e a quarta etapa se referia à elaboração de recursos didáticos para o processo ensino-aprendizagem de Trigonometria no Ensino Médio. A análise dos materiais procurou evidenciar as suas características e potencialidades para o processo ensino-aprendizagem de conteúdos de Trigonometria. A seguir, apresentamos as análises.

AS PROVAS DA OBMEP E DO ENEM (2018 – 2020)

O ENEM foi criado em 1998 com a finalidade de avaliar o desempenho escolar dos alunos egressos da Educação Básica. Tornou-se uma importante macroavaliação que possibilita o ingresso nas universidades públicas por meio do Sistema de Seleção



Unificada (Sisu).

Por sua vez, a OBMEP foi criada em 2005 sendo organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) cujo escopo principal é estimular o estudo da Matemática e identificar jovens talentos na área. Em parceria com uma entidade privada, o IMPA oferta uma bolsa para os medalhistas da OBMEP matriculados nas universidades públicas para que possam se manter e se dedicar integralmente aos estudos na graduação.

O período temporal escolhido para a análise das provas foi de 2018 à 2020, sendo que foram extraídas dos sites do INEP e da OBMEP.

Em relação à prova da OBMEP, não houve aplicação em 2020, portanto, tivemos que escolher outro ano para análise e escolhemos o mais próximo que foi o de 2018. Detalharemos a seguir a análise das questões do ENEM 2019/2020 e da OBMEP 2018/2019.

Referente ao caderno de questões do ENEM, dentre as 45 questões de Matemática da prova do ENEM 2019, caderno azul, apenas 2 questões abordavam conteúdos de Trigonometria, e infelizmente o mesmo se repetiu para o ENEM 2020, caderno amarelo, no qual também somente havia 2 questões que estavam relacionadas à Trigonometria. Na prova de 2019 (caderno azul) a questão de número 166 envolvia a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo (conceito elementar de Trigonometria) sendo de nível fácil e a questão 177 abrangia a função seno, portanto, de nível difícil. Abaixo, na figura 1, vemos as questões de 2019 citadas:

Figura 1 – Questões do ENEM 2019 que abordam conteúdos de Trigonometria

Questão 166

Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* – dobrar; *kami* – papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

- $2\sqrt{22}$ cm.
- $6\sqrt{3}$ cm.
- 12 cm.
- $6\sqrt{5}$ cm.
- $12\sqrt{2}$ cm.

Questão 177

Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.

A função $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h , medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t , medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β , que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π .

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β , de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

- 1.
- 2.
- 4.
- 5.
- 8.

Fonte: INEP (2019)

Como pudemos observar, as questões são contextualizadas o que permite compreender as aplicações dos conceitos. A resolução da questão 177 é um pouco trabalhosa, requer não apenas a noção sobre ciclo trigonométrico, de ângulos, da periodicidade da função seno, mas também de manipulações algébricas envolvendo ângulos. O enunciado traz explicitamente a função seno $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 6$, sendo necessário na resolução a correlação dos conceitos trigonométricos citados com a função.



Além do mais, a questão 177 trabalha com parâmetro, o que exige uma interpretação atenta do que se pede no enunciado, que é o menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β , de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, considerando que beta é um número inteiro positivo. Como beta deve ser maior que 4, então o menor inteiro que podemos atribuir ao beta é 5, logo a resposta é a letra D.

No ano de 2020, somente 2 questões estavam relacionadas aos conceitos de Trigonometria, sendo estas as questões de número 179 e 180, questões de nível fácil, que abordavam a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo e relações trigonométricas no triângulo retângulo, no caso, a tangente. As questões eram contextualizadas, abordando construções em situações do cotidiano, o que atribui maior sentido aos conceitos de Trigonometria.

A seguir, na figura 2 estão as questões da prova de 2020 do ENEM:

Figura 2 – Questões do ENEM 2020 que abordam conteúdos de Trigonometria

Questão 179

No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.

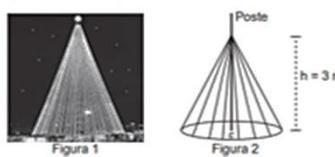


Figura 1 Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

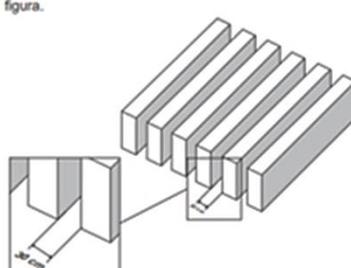
Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

- A 4,00.
- B 4,87.
- C 5,00.
- D 5,83.

Questão 180

Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

- A 9.
- B 15.
- C 26.
- D 52.
- E 60.

Fonte: INEP (2020)

Sobre a prova da OBMEP, foram analisadas as provas de 2018 e 2019 do nível 3 correspondente ao Ensino Médio. A OBMEP apresenta duas fases em suas provas.

Na prova da OBMEP de 2018 foi identificada apenas uma questão que abordava Trigonometria na 1ª fase com a utilização do Teorema de Pitágoras (questão 9) de nível intermediário considerando que implicava em observar também as áreas dos setores dos dois círculos e a razão entre as áreas dos dois setores, intercalando com noções de Geometria. Não foram identificadas questões de Trigonometria na 2ª fase da OBMEP de 2018.

Na prova da OBMEP de 2019 havia uma questão que abordava Trigonometria na 1ª fase (questão 11) e uma questão na 2ª fase (questão 4). Embora em ambas as fases o conteúdo principal de Trigonometria fosse a aplicação do Teorema de Pitágoras, a resolução das questões era trabalhosa, com muitas etapas, procedimentos matemáticos e relação com conceitos de Geometria, sendo uma

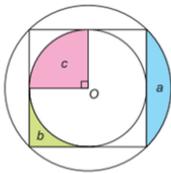
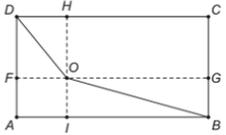
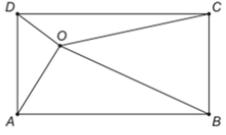
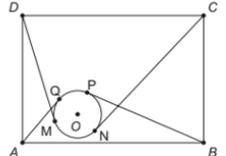
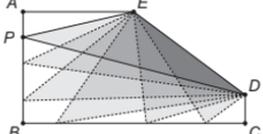


questão de nível difícil (1ª fase) e a outra de nível fácil, respectivamente.

Numa visão geral, as questões de Trigonometria das provas da OBMEP analisadas implicam em resoluções extensas, processuais com muitos procedimentos matemáticos, abrangendo uma perspectiva mais analítica do ponto de vista de compreensão conceitual e procedimental. As questões identificadas não são contextualizadas e se desdobram em demonstrações matemáticas, exigindo mais o conhecimento da matemática pura do que das aplicações dessa matemática pura.

Abaixo (figura 3) vemos as questões da OBMEP de 2018 e 2019:

Figura 3 – Questões do OBMEP 2018 e 2019 que abordam conteúdos de Trigonometria

Questão 9 – 1ª Fase OBMEP	Questão 4 – 2ª Fase OBMEP
<p>9. A figura mostra três regiões, a, b e c, determinadas por um quadrado de centro O, e suas circunferências inscrita e circunscrita. Qual das igualdades a seguir é verdadeira?</p> <p>A) $c = a + b$ B) $c = a - b$ C) $c = 2a + b$ D) $c = a + 2b$ E) $c = 2a - b$</p> 	<p>4. a) Na figura abaixo, o ponto O no interior do retângulo $ABCD$ é tal que $OF = 2$, $OG = 6$, $OH = 3$ e $OI = 1$. Os segmentos FG e HI são paralelos aos lados AB e BC, respectivamente. Calcule $OB^2 + OD^2$.</p>  <p>b) Seja O um ponto qualquer no interior de um retângulo $ABCD$, como na figura abaixo. Mostre que $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.</p>  <p>c) Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e os segmentos AQ, BP, CN e DM são tangentes ao círculo de centro O. Se $CN = 10$, $BP = 8$ e $DM = 7$, determine o comprimento de AQ.</p> 
<p style="background-color: yellow;">Questão 11 – 1ª Fase OBMEP</p> <p>11. A figura mostra um pentágono $ABCDE$ tal que $AB = 4$, $BC = 8$, $CD = 1$, $AE = 4$, e os ângulos ABC, BCD e EAB são retos. O ponto P se move sobre os lados AB e BC. Quantas posições o ponto P pode ocupar sobre os lados AB e BC de modo que o triângulo PDE seja isósceles?</p> <p>A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5</p> 	

Fonte: OBMEP (2018, 2019)

Ressaltamos que os parâmetros de classificação das questões (fácil, intermediário e difícil) se originam do que entendemos sobre as dificuldades dos alunos nas aulas de Trigonometria e os desafios que podem encontrar na resolução das questões. Assim, a categoria de nível fácil é caracterizada pela pouca abstração que possui, além de manipulações algébricas simples, poucos conhecimentos necessários para a resolução da questão e a problemática simples de se entender o que se pede na questão. Já a categoria de nível difícil, a classificamos por possuir alto nível de abstração, muitos conhecimentos para solucionar a questão e certas dificuldades para compreender a questão. O nível intermediário se caracteriza por médio nível de abstração, conhecimentos específicos para a questão e de entendimento não tão simples do que o enunciado da questão pede.

É indispensável que o professor trabalhe as questões de Trigonometria dessas provas em sala de aula verificando se os alunos conseguem resolvê-las, quais suas dificuldades e se há defasagens que precisam ser supridas para que os alunos elaborem as estratégias de resolução e desta forma estejam mais instrumentalizados com os tipos de questões que integram essas provas, visto que estão presentes no período em que os alunos cursam o Ensino Médio. Por outro lado, em relação às questões da OBMEP que não são contextualizadas, é fundamental que o professor apresente aos alunos em que situações esses conceitos envolvidos nas questões podem ser aplicados para que adquiram significado e não se resumam a extensas



demonstrações de procedimentos matemáticos.

ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Realizamos uma análise de duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio que abordam a Trigonometria: “Matemática Interligada: Trigonometria, Fenômenos Periódicos e Programação” - Ensino Médio, de autoria de Thais Marcelle de Andrade publicado em 2020 (Editora Scipione) e “Matemática: Interação e Tecnologia” da 1ª série do Ensino Médio, de autoria de Rodrigo Dias Balestri publicado em 2016 (Editora Leya). A seleção dos livros se deu pelos critérios: a utilização dos livros pelas escolas públicas de Maceió (tendo em vista que a pesquisa da iniciação científica se desenvolveu na Universidade Federal de Alagoas sendo voltada para as escolas públicas da capital alagoana) e livros que foram impressos antes e depois da publicação da BNCC e que constam do acervo das escolas públicas. Assim, foram selecionados os dois livros citados anteriormente, que vemos na figura abaixo:

Figura 4 – Livros didáticos



Fonte: Acervo dos autores

O primeiro livro integra a Coleção “Matemática Interligada” que é agrupada por temas de Matemática do Ensino Médio, seguindo a nova organização curricular proposta pela BNCC (BRASIL, 2018). Os conteúdos de Trigonometria estão estruturados em 3 seções, a saber: Trigonometria no Triângulo, Funções Trigonométricas e Relações, Equações e Transformações Trigonométricas. Traz uma abordagem histórica de diversos conceitos, seguidos de demonstrações de teoremas, leis e relações trigonométricas, além da abordagem de alguns exemplos contextualizados, com desenhos e figuras que possibilitam a visualização das relações trigonométricas que estão sendo demonstradas.

Traz situações-problema contextualizadas e exercícios, além da sugestão do uso do Geogebra para a aprendizagem de alguns conceitos de Trigonometria e também o uso da calculadora para a determinação dos valores do seno, cosseno e tangente. Embora traga situações-problema contextualizadas e questões de vestibulares, há uma predominância de exercícios para fixação de procedimentos. As equações trigonométricas ainda são abordadas de modo demonstrativo, sem conexão com aplicações, o que reforça a concepção dos alunos de que a Trigonometria é



abstrata. Nas fórmulas de transformação, a autora ainda apresenta uma aplicação delas ao abordar uma situação-problema sobre a inclinação da torre de Pisa, mas seriam necessárias outras situações-problema para focar outras aplicações, assim as fórmulas de transformação teriam mais significado para os alunos sem se reduzir a mera manipulação procedimental.

O segundo livro integra a Coleção “Matemática: Interação e Tecnologia” que é composta por 3 volumes e o conteúdo de Trigonometria está no volume 1 que se refere à 1ª série do Ensino Médio, estando em uma única sessão intitulada de “Introdução à Trigonometria”. Esta sessão traz os seguintes tópicos: Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Valores do Seno, Cosseno e Tangente, Relações Trigonométricas em um triângulo qualquer.

As abordagens históricas são bem informativas, não sendo longas, focando em demonstrações e situações-problema, e comparado com o primeiro livro, o segundo dá ênfase às situações-problema. Traz questões de vestibulares, desafios, indicação do uso do Geogebra e do cálculo dos valores das relações trigonométricas com o uso da calculadora, como sugere o primeiro livro. Verificamos que o volume 2 e 3 da Coleção não abordam outros conteúdos de Trigonometria, o que limita bastante o conhecimento acerca da Trigonometria, se restringindo aos conteúdos básicos. Em relação ao primeiro livro, os conteúdos de Trigonometria são mais reduzidos e resumidos sem abordar as funções e nem equações trigonométricas, ao passo que o primeiro livro traz mais tópicos de Trigonometria, talvez por ser um livro específico para Trigonometria.

Como pudemos verificar, o primeiro livro é mais abrangente e o segundo mais limitado em relação ao conteúdo de Trigonometria, apresentando um número reduzido de tópicos de Trigonometria, com uma ênfase nas situações-problema contextualizadas no segundo livro.

Como comentando anteriormente, é necessário que os autores dos livros didáticos deem maior ênfase à abordagem de Trigonometria por meio de situações-problema contextualizadas para que os alunos possam atribuir significado aos conceitos compreendendo as aplicações em diversas situações e contextos, pois como observamos há uma preponderância da mecanização dos procedimentos em Trigonometria com excesso de exercícios, sem uma devida compreensão conceitual que deve partir das aplicações. Estas abordagens limitadas presentes nos livros didáticos produzem diversos equívocos e erros, como a simplificação da Trigonometria e a compreensão fragmentada como explica Brown (2006), além do método de ensino de Trigonometria adotado pelos professores desencadear um conhecimento memorizado que não é retido pelos alunos a longo prazo, como coloca Orhun (2002). Por outro lado, os alunos além de ver a Trigonometria como uma parte complicada da Matemática, ficam confusos sobre quais situações devem aplicar a trigonometria triangular, a trigonometria circular e/ou trigonometria analítica e certamente isso decorre da falta de explicação das aplicações dos conceitos trigonométricos contextualizando-as para o cotidiano dos alunos.

JOGOS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

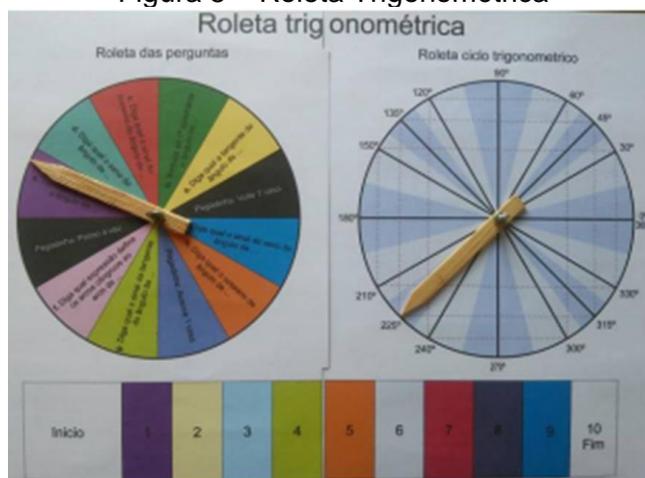
A terceira parte da pesquisa qualitativa focou na seleção de jogos de mesa para auxiliar na aprendizagem de conceitos de Trigonometria no Ensino Médio. Mapeamos 6 jogos de mesa e os critérios para a seleção dos jogos foram os seguintes: a interação (que pode desencadear o interesse pela aprendizagem do conteúdo e o engajamento



para participação das aulas); a possibilidade de confecção dos jogos com materiais acessíveis e facilidade de adaptação das regras do jogo. Assim, foram selecionados os seguintes jogos: Roleta Trigonométrica, Batalha Naval Trigonométrica, Mandala trigonométrica, Corrida no Ciclo Trigonométrico, Dominó Trigonométrico e Stop Trigonométrico.

A roleta trigonométrica é composta por duas roletas, sendo que a segunda possui o ciclo trigonométrico e os ângulos notáveis (SILVA et al, 2016). Todos os participantes devem girar a roleta trigonométrica e o jogador que sortear o maior ângulo terá direito a começar a partida. Ele deverá girar a roleta das perguntas, e em seguida, a roleta trigonométrica, devendo responder à pergunta relativa ao ângulo e a resposta deverá ser conferida pelo mediador, como se vê na figura 5:

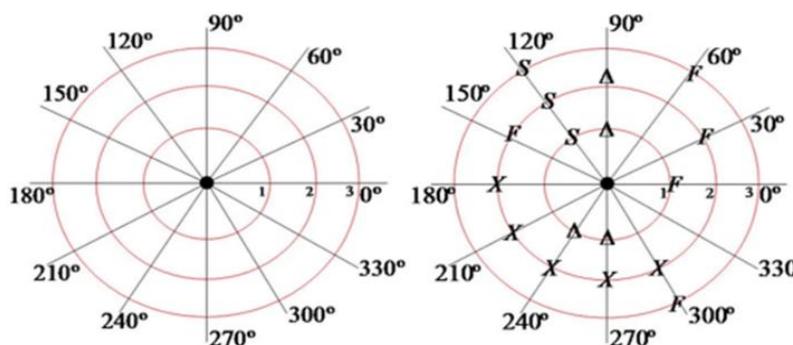
Figura 5 – Roleta Trigonométrica



Fonte: Silva et al (2016)

A Batalha Naval Trigonométrica (NASCIMENTO et al, 2019) aborda o conceito de coordenadas e localização de ângulos no círculo trigonométrico. É composta por um tabuleiro para cada jogador que posicionará sua esquadra composta por um porta aviões, dois submarinos, dois destroyers, cinco fragatas. Cada jogador terá o direito de disparar falando uma posição no tabuleiro, sendo primeiro o raio da circunferência, e, em seguida, o ângulo. Se não atingir nenhum navio, o adversário deve dizer “água”, sendo a sua vez de dar o tiro. O jogo prossegue até que uma das frotas seja destruída, vencendo quem afundar todos os navios do adversário (figura 6):

Figura 6 – Batalha Naval Trigonométrica



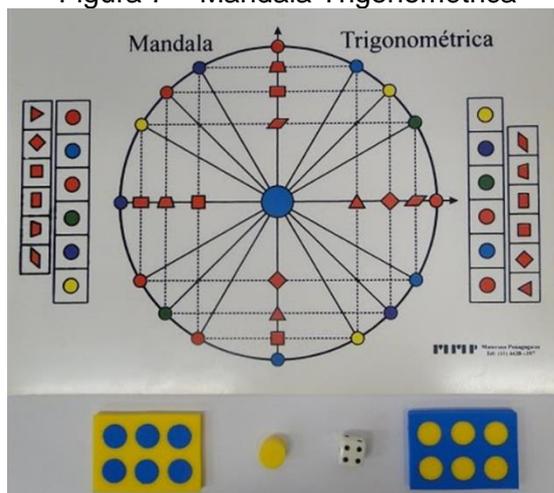
Fonte: Nascimento et al (2019)



A Mandala Trigonométrica (WENDLAND, 2017) aborda os arcos e os valores dos senos e cossenos e é jogada em duplas. Lins, Lozada e Duca (2022) explicam que este jogo foi criado por Maria Helena Soares de Souza e Walter Spinelli, autores de livros didáticos de Matemática e pode ser comprado (kit) na loja MMP (Materiais Pedagógicos para Matemática) ou reproduzido (impresso – o professor faz o molde e imprime). Usa-se um dado e pinos para representar as duplas. A duplas partem do ponto (1,0) seguindo no sentido anti-horário (positivo). A dupla joga o dado e o número obtido corresponde ao número de círculos coloridos da circunferência em que se deve fixar o pino da dupla, informando o valor do arco na circunferência e os valores do seno e cosseno deste arco.

A solução deve passar pela análise da dupla adversária. Acertando, a dupla marcará a cor correspondente na coluna de cores e se errar, será a dupla adversária que fará marcação na sua coluna e quem preencher totalmente a coluna primeiro, vencerá o jogo. A seguir, vemos o tabuleiro da mandala trigonométrica (figura 7):

Figura 7 – Mandala Trigonométrica



Fonte: Wendland (2017)

A Corrida no Ciclo Trigonométrico (ODORICO; SOUZA JR, 2013) tem como objetivo identificar arcos e ângulos, localizá-los no ciclo trigonométrico e a converter medidas graus e radianos. É conhecida como Fórmula Mundy. O tabuleiro tem o formato de uma pista de corrida dividida em 24 partes iguais correspondentes a um ângulo de 15° . As casas de cor vermelha indicam que o jogador perde a vez e na cor azul, indicam que o jogador terá que retirar uma carta do monte de Sorte (cartas com ângulos de medidas positivas) ou Azar (cartas com ângulos de medidas negativas). Existem as cartas “Coringa” que podem ser usadas como “troca” com qualquer outro tipo de carta ou mesmo ser usada como uma ação contra o adversário. A bandeira preta indica que se deu uma volta completa no ciclo trigonométrico no sentido anti-horário (positivo) e a bandeira vermelha indica que se cruzou a linha de largada no sentido horário. São necessários dois carrinhos, caso não tenha, podem ser usadas tampinhas de garrafa PET para representar os carrinhos.

O time que retirar o maior ângulo no monte das cartas de “Sorte ou Azar” iniciará o jogo, devendo retirar uma carta do bloco “Desafio” percorrendo o ângulo indicado na carta. Ao finalizar uma volta completa no sentido anti-horário, o time ganha uma bandeira preta. Mas, se fizer o percurso no sentido horário passando pela largada,



ganhará uma bandeira vermelha. Vencerá o jogo, o time que der duas voltas completas no ciclo trigonométrico no sentido positivo ganhando duas bandeiras pretas. Vejamos a seguir o tabuleiro e as cartas na figura 8:

Figura 8 – Jogo Corrida no Ciclo Trigonométrico



Fonte: Odorico e Souza Jr (2013)

O dominó trigonométrico (MARQUES; MORAES, 2016) aborda o círculo trigonométrico na conversão de grau para radiano sendo recomendado para a 1ª série do Ensino Médio. É composto por 28 pedras, possui as mesmas regras de um dominó convencional e pode ser confeccionado com material acessível como isopor ou E.V.A com largura maior (de 2 a 3 cm). A ideia do jogo é associar o grau com o radiano, como vemos na figura 9:

Figura 9 – O dominó trigonométrico com materiais para confecção



Fonte: Marques e Moraes (2016) e os autores

O STOP Trigonométrico de autoria de Musha et al (2016) é voltado para a 2ª série do Ensino Médio abordando conceitos de Trigonometria como o ângulo correspondente em graus, o arco côngruo, o quadrante ao qual o arco pertence, a redução do arco ao primeiro quadrante e valores de seno, cosseno e tangente. É disponibilizada uma folha com uma tabela na qual os alunos irão fazer as anotações, contendo colunas para se colocar os valores do radiano, grau, arco côngruo, redução, seno, cosseno e tangente (figura 10):

Figura 10 – Tabela para anotações e urna com fichas de valores de ângulos



Fonte: Musha et al (2016) e Lozada, Lins e Oliveira (2021a)



Os valores dos ângulos notáveis poderão ser colocados em decimais ou com seus valores em formato de fração. É importante que os alunos observem os sinais dos quadrantes para cada relação trigonométrica. Lozada, Lins e Oliveira (2021a) fizeram uma pequena adaptação deste jogo acrescentando uma urna com fichas com os ângulos escritos que deverão ser sorteados, sugerindo que se divida a turma em grupos para gerar um trabalho colaborativo no qual possam trocar ideias e discutir. Após o sorteio dos ângulos – que são anotados pelo professor numa tabela na lousa – o jogo é iniciado e será finalizado quando o primeiro grupo falar STOP. As tabelas devem ser preenchidas com caneta e após finalizado o jogo, o professor corrigirá as tabelas e aquele grupo que tiver mais acertos, vencerá.

É importante que na aplicação desses jogos sejam disponibilizados folhas e lápis para os alunos fazerem os cálculos, bem como os conceitos abordados no jogo devem ser desenvolvidos previamente, sendo que o jogo servirá para resgatar/reforçar e ressignificar os conceitos. Após a finalização do jogo é importante que o professor faça a sistematização dos conhecimentos retomando os conteúdos e esclarecendo as dúvidas.

Encerrado o levantamento dos jogos de mesa, considerando a importância da inserção dos alunos na cultura digital como prevê a BNCC (BRASIL, 2018), realizamos um levantamento de jogos digitais que envolvem Trigonometria (LOZADA; LINS; OLIVEIRA, 2021b). Constatamos que há uma carência de jogos digitais brasileiros para o processo ensino-aprendizagem de Trigonometria e encontramos os jogos em páginas estrangeiras que podem ser traduzidas utilizando a extensão do navegador. Foram 3 jogos encontrados, que foram selecionados a partir dos critérios de acessibilidade, interatividade e possibilidade de correlação entre conceitos de Trigonometria, sendo estes: Rocket Angles, Pythagorean Explorer e Trig Ratio Race. Em síntese os jogos abordam os conceitos de ângulos, relações trigonométricas no triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras, ou seja, conceitos básicos utilizados em Trigonometria (LOZADA; LINS; OLIVEIRA, 2021b).

Partindo do que relatamos acerca da carência de jogos digitais de Trigonometria, criamos 2 jogos na plataforma Wordwall: um envolve diretamente as funções trigonométricas e utiliza os ângulos notáveis, o FunShow, que consiste em um jogo de quiz com perguntas sobre Funções Trigonométricas e o outro é um jogo similar ao antigo jogo conhecido PacMan, porém, para que o jogador vença o jogo ele precisa responder corretamente a pergunta que aparecer na tela caminhando em direção das respostas enquanto desvia dos monstros que existem nas fases. Também destacamos que no processo de criação, levamos em consideração as questões da OBMEP e do ENEM para desenvolvermos os conteúdos que seriam usados na hora de jogar. Abaixo (figura 11), vemos as telas dos jogos:

Figura 11 – Jogos digitais para o ensino de Trigonometria elaborados na plataforma Wordwall



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)



Com base no que foi levantado nas três etapas da pesquisa seguimos para a quarta etapa da pesquisa com a elaboração de material didático no sentido de auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria no Ensino Médio, criando uma trilha de aprendizagem (com os conteúdos círculo trigonométrico; funções trigonométricas; transformações trigonométricas; relações trigonométricas; equações trigonométricas), vídeos para o Youtube sobre os conteúdos da trilha e as questões da OBMEP E ENEM e Podcast com episódios abordando os conteúdos presentes na trilha de aprendizagem, além do desenvolvimento de jogos digitais na plataforma Wordwall (já citados) e os vídeos relativos à utilização desses jogos. Os vídeos estão disponíveis no Canal do Grupo Matedtec no Youtube e os episódios do Podcast estão disponíveis no Spotify Canal do Matedtec (figura 12):

Figura 12 – Recursos didáticos elaborados



Fonte: Acervo Matedtec (2022)

Consideramos essencial que o professor elabore materiais didáticos para o ensino de Trigonometria considerando as dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos, bem como aborde situações-problema que sejam baseadas na realidade para que os alunos consigam entender as aplicações dos conceitos e perceber que não se resumem apenas à procedimentos de resolução que são mecanizados sem significado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Molepo (2017) explica que a Trigonometria é uma área da Matemática que combina raciocínio algébrico, gráfico e geométrico. Esse aspecto pode ser notado na análise das questões da OBMEP que foi demonstrada neste trabalho.

Segundo Molepo (2017) esta natureza multifacetada da Trigonometria torna de alguma forma desafiador para os alunos entendê-la. Além disso, o autor reitera que a natureza multifacetada da Trigonometria falha em ajudar os alunos a formar conexões entre diferentes representações ou vê-la como parte integrante da disciplina de Matemática. Gerhana, Mardiyana e Pramudya (2017) reiteram esse posicionamento ao afirmar que a Trigonometria é um produto de técnicas algébricas, realidades geométricas e relações trigonométricas, tendo como fonte conteúdos de aritmética e geometria que se relacionam no contexto trigonométrico.



Weber (2005) citado por Molepo (2017) coloca que a maioria das abordagens de Trigonometria ensina apenas habilidades processuais e não permite que os alunos entendam completamente as funções trigonométricas. Weber (2008, apud MOLEPO, 2017) também descobriu que muito do ensino de Trigonometria se concentra em procedimentos e cálculos sem ênfase na aplicação do processo, o que dificulta muito aos alunos fazer conexões entre as representações. Isso leva os alunos a adquirirem (ou não) uma certa destreza procedimental vinculada à memorização, mas sem compreensão do que esses procedimentos significam e qual a sua relação com a compreensão conceitual. Para resolver equívocos como esse, Hirsch, Weinhold e Nichols (1991) apud Molepo (2017) afirmam que o ensino de Trigonometria precisa passar da memorização para a compreensão conceitual, múltiplas representações, modelação matemática e resolução de problemas. Se o conhecimento procedimental e conceitual não estiverem ligados, os alunos podem gerar uma resposta, mas não entendem o que estão fazendo (HIEBERT; LEFEVRE, 1986 apud MOLEPO, 2017).

Wertheimer (1945) inclusive afirma que o uso contínuo de repetição de procedimentos, que geralmente se observa em listas de exercícios, tem efeitos nocivos uma vez que gera hábitos de pura ação mecanizada, em vez de levar a pensar, privando o aluno de enfrentar um problema livremente em que poderia mobilizar a sua estrutura cognitiva para criar heurísticas para a resolução, pois o problema propõe desafios e possibilita o desenvolvimento de várias habilidades, ao passo que os exercícios são limitados.

Como citamos neste trabalho, muitas pesquisas apontam as dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos de Trigonometria, além da falta de material didático específico para o ensino levando o professor a focar em aulas teóricas desprovidas de aplicação o que aumenta o desinteresse dos alunos em aprender Trigonometria (JOSHI, 2022). Gerhana, Mardiyana e Pramudya (2017) afirmam que as dificuldades dos alunos em compreender Trigonometria estão associadas à falta de conhecimentos/estratégias, habilidades de resolução de problemas e as habilidades de raciocínio, além do método de ensino utilizado pelo professor.

As dificuldades enfrentadas pelos alunos também são observadas pelos professores durante a formação inicial como apontam Nabie et al (2018). Os autores realizaram uma pesquisa para levantar as percepções e o conhecimento de conceitos trigonométricos de professores em formação. Constataram que a maioria dos futuros professores tinha uma percepção negativa da Trigonometria, enxergando-a como rígida, abstrata, difícil e desagradável de se aprender. Os autores explicam que esta visão decorre do fato de que o professor que os ensina não se preocupa que compreendam a Trigonometria e suas aplicações, mas que memorizem fórmulas e procedimentos, além de não dedicar um tempo razoável para desenvolver os conceitos, fazendo abordagens resumidas para que consigam cumprir com o conteúdo programático do ano letivo. Dessa forma, os alunos parecem aprender os conceitos trigonométricos isoladamente, o que afeta sua capacidade de estabelecer conexões entre eles, ao passo que outros sequer compreendem o que estão fazendo ou não conseguem aprender nem os procedimentos de resolução de exercícios de Trigonometria.

Nabie et al (2018) pontuam que a compreensão matemática dos alunos é demonstrada por seu desempenho e aplicação de seus conhecimentos na resolução de problemas que envolve a organização das estruturas mentais que incluem ações, processos, objetos e esquemas. Os resultados da pesquisa demonstraram que a maioria dos professores em formação apresenta defasagem em seu conhecimento de



ação-processo-objeto-esquema como algo integrado, o que limita sua capacidade de lidar ativamente com problemas envolvendo Trigonometria.

O grupo pesquisado teve dificuldade em simplificar, expandir e aplicar conceitos trigonométricos básicos e identidades na resolução de problemas, não conseguindo por exemplo, explicar por que as funções tangente e cotangente são positivas no terceiro quadrante nem relacionar razões trigonométricas em um triângulo retângulo para explicar o porquê. Assim, na maioria das tarefas ficou evidente que os futuros professores não compreenderam relações conceituais em Trigonometria, ou seja, não conseguiram construir as estruturas mentais apropriadas para uma compreensão significativa que lhes permitisse responder as tarefas básicas de Trigonometria. A pesquisa de Nabie et al (2018) sinalizou aspectos importantes para a reflexão acerca dos conhecimentos de Trigonometria na formação inicial dos professores de Matemática no que diz respeito às abordagens dos conceitos, recursos didáticos utilizados para o ensino, as aplicações, a contextualização, interdisciplinaridade (WEBER, 2005; TUNA, 2013) e problematização.

Deste modo, visando melhorar o processo ensino-aprendizagem de Trigonometria no Ensino Médio, muitos professores têm buscado utilizar recursos didáticos variados. Os jogos, por exemplo, são recursos que auxiliam consideravelmente a compreensão e assimilação dos conceitos trigonométricos como mostramos, pois possibilitam uma abordagem lúdica e interativa, estimulando o interesse dos alunos pelo conteúdo e a participação nas aulas. Além do mais, é necessário que o professor planeje as aulas para o ensino dos conceitos de Trigonometria, mostrando as aplicações no cotidiano para que os alunos compreendam significativamente os conceitos, desfazendo a ideia de que são abstratos e consistem apenas em procedimentos.

Por outro lado, visando a inserção da cultura digital na sala de aula, conforme previsto em uma das competências gerais da BNCC (BRASIL, 2018), o professor deve usar as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs) como ferramentas no processo ensino-aprendizagem de Trigonometria, utilizando aplicativos, jogos digitais e softwares, como o Geogebra. O uso do Geogebra para aprendizagem de conteúdos de Trigonometria possibilita a compreensão da relação entre elementos trigonométricos em virtude da construção das figuras permitindo a visualização e a experimentação (JOSHI, 2022), bem como a elaboração de hipóteses e justificativas para as atividades propostas, porque a construção atribui maior significado aos conceitos estabelecendo as relações de forma concreta, dinâmica e interativa.

Dessa forma, o professor pode instigar os alunos a usarem a ferramenta para, por exemplo, criarem os seus próprios triângulos, e assim questioná-los sobre os seus diferentes aspectos, como encontrar suas medidas, ângulos, área, construir os conceitos de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. O GeoGebra não se restringe somente à parte geométrica, mas permite também o estudo das funções trigonométricas e assim os alunos podem compreender melhor suas características.

Por fim, consideramos essa pesquisa como o ponto inicial para que outras com a mesma temática sejam realizadas aprofundando o conhecimento acerca das características e aperfeiçoamento de recursos didáticos digitais e não digitais para o ensino de Trigonometria, bem como uma análise mais detalhada de outras coleções de livros didáticos para verificar como os conteúdos são dispostos e como os autores estabelecem relações com as aplicações no cotidiano, de modo a trazer um panorama das características desses recursos e como podem ser aperfeiçoados a fim de melhorar o processo ensino-aprendizagem.



REFERÊNCIAS

AZEVEDO, I. F., ALVES, F. R. V. Trigonometria e suas aplicações no Geogebra: aulas experimentais com alunos do ensino médio. **Tangram** – Revista de Educação Matemática, Dourados, MS, v.2 n. 2, p. 102-115, 2019.

BASTIAN, I. V.; ALMOULOU, S. A. O teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: SBEM, n. 14, p. 45-53, 2003.

BRASIL. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRITO, A. J.; MOREY, B. B. Geometria e Trigonometria: dificuldades de professores do ensino fundamental. In: FOSSA, J. A. (Org). **Presenças matemáticas**. Natal: EDUFRN, 2004.

BROWN, A. S. The trigonometric connection: students' understanding of sine and cosine. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30., 2006, Prague, **Proceedings ...Prague: PME30, 2006**. p. 228.

COSTA, N. M. L. **A história da trigonometria**. São Paulo: PUC, 1997.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GERHANA, M. T. C, M MARDIYANA, M.; PRAMUDYA, I. **The effectiveness of project based learning in trigonometry**. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/895/1/012027/pdf>. Acesso em: 02 jan. 2022.

GOMES, S. C. Ensino de trigonometria numa abordagem histórica. **Holos**, Natal, v. 3, p. 193-203, 2015.

GÜR, H. **Trigonometry learning**. New Horizons in Education, v. 57, n. 1, p. 67-80, 2009.

INEP. **Provas e gabaritos do Enem**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 fev. 2021.

JOSHI, R. R. **Students achievement in trigonometry teaching through geogebra**. 2022. 107 f. Dissertation (Master in Education) – Tribhuvan University, Kathmandu, Nepal, 2022.

LIMA, E. L. (Ed.). **Exame de textos**: análise de livros de Matemática para o ensino médio. Revista do Professor de Matemática. n. 46. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LINS, H. H. F.; LOZADA, C. O.; DUCA, E. G. S. Contribuições para o ensino de



Trigonometria no Ensino Médio: a mandala trigonométrica. In: CONGRESSO ICLOC, 13., 2022, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Instituto Lourenço Castanho, 2022. p. 1-2.

LOZADA, C. O.; LINS, H. H. F.; OLIVEIRA, M. L. S. Uma análise de jogos para o ensino de trigonometria no ensino médio. In: JORNADA ACADÊMICA CAMPUS SERTÃO, 3., 2021a, Delmiro Gouveia. **Anais...** Delmiro Gouveia: UFAL, 2021a. p. 1 – 5.

LOZADA, C. O.; LINS, H. H. F.; OLIVEIRA, M. L. S. Trigonometria no ensino médio: uma análise de jogos digitais para o ensino de conceitos. In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2021, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: SBEM/PB, 2021b. p. 1-10.

LÜDKE, M. ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2013.

MARQUES, R. M. S.; MORAES, M. S. F. Proposta de ensino de trigonometria através do uso de materiais concretos e jogos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo, **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

MOORE, K, C. Coherence, quantitative reasoning and the trigonometry of students. In: MAYES, R; HATFIELD, L. L. **Qualitative reasoning and mathematical modelling:** a drive for STEM integrated education and teaching in context. Larmie, WY: University of Wyoming, 2012, p. 75-92.

MOLEPO, N. S. **Alignment between the cognitive demands of the written and assessed trigonometry curricula in South Africa.** 2017. 165 f. Dissertation (Master of Sciences) - University of the Witwatersrand, Johannesburg, 2017.

MONTEIRO, T. T. M. et al. Trigonometria: o jogo como recurso didático no ensino e aprendizagem da trigonometria. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 6., 2019, Fortaleza, **Anais...** Fortaleza: Realize Eventos Científicos, 2019. p. 1-6.

MUSHA, F. D. et al. Stop Trigonométrico: o jogo como recurso didático no ensino e aprendizagem de trigonometria. In: SEMANA DE ENSINO, EXTENSÃO, PESQUISA E EXTENSÃO DO LITORAL, 2., 2016, Paranaguá, **Anais...** Paranaguá: IFPR, 2016, p. 1-10.

NABIE, M.J. et al. **Journal on Mathematics Education**, v. 9, n. 2, p. 169-182, 2018.

OBMEP. **Provas e soluções.** Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 10 fev. 2021.

ORHUN, N. (2002). Solution of verbal problems using concept of least common multiplier (Lcm) and greatest common divisor (Gcd) in primary school mathematics and misconceptions. In: International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: The Humanistic Renaissance in Mathematics Education, 2002, Palermo, **Proceedings...** Palermo, Italy, 2002.



TUNA, A. A conceptual analysis of the knowledge of prospective mathematics teachers about degree and radia. **World Journal of Education**, v. 3, n. 4, p. 1-9, 2013.

WATANABE, R. C. Seno de 30 é um meio? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 30, p. 26-32, 1996.

WEBER, K. Students' understanding of trigonometric functions. **Mathematics Education Research Journal**, v. 17, n.3, p. 91-112, 2005.

WERTHEIMER, M. **Productive thinking**. New York: Harper, 1945.

Recebido em: 15/11/2022

Aceito em: 01/01/2023